数理解析研究所講究録
620巻 1987年 70-74

On the genus of torus links

大阪工大　渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

R^3に埋蔵された2つのsolid tori V^*, Vのcoreをc^*, cとする，ただしc^*はunknottedとする。V^*からVへのfaithful homeomorphism (V^*のlongitudeをVのそれに移す)をfとする。V^*の中のoriented link l^*に対し$f(l^*)$をlで表わす。特に$l^* \subset \partial V^*$のときl^*をtorus link, lをcable link (with a core c)と言う。

torus knot k of type (p, q)の3次元genus $g(k)$は次の形である。

<u>定理0</u> ([2])　kをtorus knot of type (p, q)とすると，$g(k)=\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$で与えられる。

ここではこれを拡張した定理を証明する。

<u>定理1</u>　lをtorus link of type (p, q)でlの各成分は同じ向きとする。p, qの最大公約数をdとすると，

$$g(l)=\frac{1}{2}\{(p-1)(q-1)-d+1\}$$

で与えられる。

lがknotのときは$d=1$だから定理0が導びかれる。

定理1の証明のために次の3つの補題を準備する。

補題1　ℓ を torus link of type (p, np) で各成分は同じ向きとする(このような link を elementary torus link と呼ぶ)。そのとき　$g(\ell)=\frac{1}{2}(p-1)(np-2)$。

(証明)　$g(\ell)\leqq\frac{1}{2}(p-1)(np-2)$ は link の genus の定義より明らか。すなわち、ℓ に対し genus が $\frac{1}{2}(p-1)(np-2)$ である曲面を構成すればよい。逆は[1]の定理3.2を使う。今 ∂V^* の meridian を μ とし $L=pc^*\cup\mu$ とおく、ここで pc^* は p 個の c^* と parallel で non-twisted な loops とする。そのとき L の Alexander polynomial は、

$$\Delta_L(t_1, \cdots, t_p, t)=(t-1)^{p-1}$$

となるから定理3.2より

$$\Delta_\ell(t_1, \cdots, t_p)=(t_1^n\cdots t_p^n-1)^{p-1}(t_1\cdots t_p-1)^{-1}$$

で与えられる。したがって $t_1=\cdots=t_p=t$ とおいて、

$$\deg.\Delta_\ell(t, \cdots, t)=(p-1)np-p\quad.$$

また ℓ の reduced Alexander polynomial $\Delta_\ell(t)$ の次数に関しては、次が成立する:

$$\begin{cases}\deg.\Delta_\ell(t)=\deg.\Delta_\ell(t, \cdots, t)+1\\ \deg.\Delta_\ell(t)\leqq 2g(\ell)+p-1\end{cases}\quad.$$

これより $g(\ell)\geqq\frac{1}{2}(p-1)(np-2)$ を得る。

次は明らかである。

<u>補題2</u>　ℓ を torus link of type (p,q) とする。p,q の最大公約数を d とするとき、ℓ は cable link of type $(d, \frac{pq}{d})$ with a core k which is a torus knot of type $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d})$ である。

R^3 の link L が decomposable とは L に disconnected な曲面が張れるときを言う。そのとき[2],[3]により次が成立する。

<u>補題3</u>　V^* の link ℓ^* が decomposable でないとする。M を V^* の meridian disk とし m, n を ℓ^* と M のそれぞれ代数的、幾何的交点数とするとき、

$$g(\ell^*) + m g(c) \leqq g(\ell) \leqq g(\ell^*) + n g(c)\text{。}$$

したがって特に $m=n$ ならば、$g(\ell) = g(\ell^*) + m g(c)$。

これらを使って定理1を証明する。ℓ を torus link of type (p,q)（これを $\ell^*_{p,q}$ で表わす）とすると補題2より ℓ は cable link of type $(d, \frac{pq}{d})$（これを $\ell_{d,\frac{pq}{d}}$ で表わす）で各成分が同じ向きだから decomposable でない。しかも $\ell^*_{d,\frac{pq}{d}}$ は elementary torus link になる。したがって

$$g(\ell) = g(\ell^*_{p,q})$$

$$
\begin{aligned}
&= g(\ell_{d,\frac{pq}{d}}) && \text{(Lemma 2)}\\
&= g(\ell^*_{d,\frac{pq}{d}}) + d\,g(k^*_{\frac{p}{d},\frac{q}{d}}) && \text{(Lemma 3)}\\
&= \frac{1}{2}(d-1)\left(\frac{pq}{d}-2\right) + \frac{d}{2}\left(\frac{p}{d}-1\right)\left(\frac{q}{d}-1\right) && \text{(Lemma 1)}\\
&= \frac{1}{2}\{(p-1)(q-1)-d+1\}\text{。}
\end{aligned}
$$

<u>付記</u> 河内氏により torus link の reduced Alexander polynomial を計算し定理1が証明できるのではないかという指摘がありました。実際にそのとおりで次が成立します。

<u>定理2</u> ℓ を torus link of type (p,q) で ℓ の各成分は同じ向きとする。p, q の最大公約数を d とすると、ℓ の reduced Alexander polynomial は次の形である:

$$
\Delta_\ell(t) = \frac{(t^{\frac{pq}{d}}-1)^d (t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}\text{。}
$$

(証明) 補題2より $\ell = \ell^*_{p,q} = \ell_{d,\frac{pq}{d}}$ であるから、

$$
\Delta_\ell(t) = \Delta_{\ell^*_{p,q}}(t) = \Delta_{\ell_{d,\frac{pq}{d}}}(t)\text{。}
$$

また [2], [3] により、

$$
\Delta_{\ell_{d,\frac{pq}{d}}}(t) = \Delta_{\ell^*_{d,\frac{pq}{d}}}(t)\,\Delta_{k_{\frac{p}{d},\frac{q}{d}}}(t^d)\text{。}
$$

ここで $\ell^*_{d,\frac{pq}{d}}$ は elementary torus link だから補題1の証明から、

$$
\Delta_{\ell^*_{d,\frac{pq}{d}}}(t) = \Delta_{\ell^*_{d,\frac{pq}{d}}}(t,\cdots,t)(t-1)
$$

$$= (t^{\frac{pq}{d}} - 1)^{d-1} (t^{d} - 1)^{-1} (t - 1) \quad 。$$

また

$$\Delta_{k_{\frac{p}{d},\frac{q}{d}}}(t^{d}) = \frac{(t^{\frac{pq}{d}} - 1)(t^{d} - 1)}{(t^{p} - 1)(t^{q} - 1)} \quad 。$$

これから定理2を得る。

したがって $\deg.\Delta_{\ell}(t) = (p-1)(q-1)$。故に

$$g(\ell) \geqq \frac{1}{2}\{\deg.\Delta_{\ell}(t) - d + 1\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(p-1)(q-1) - d + 1\} \quad 。$$

逆の不等号は link の genus の定義より明らかでこれより定理1を得る。

References

[1] M.E. Kidwell: Orders of links and the Alexander polynomial, Ph.D. Dissertation, Yale Univ. (1976).

[2] H. Schubert: Knoten und Vollringe, Acta Math. 90 (1953), 131–286.

[3] T. Shibuya: On compound links, Kobe Math. Sem. Notes 11 (1983), 349–361.